Prática profissional para a promoção do cálculo mental na sala de aula: Uma experiência no 6.º ano[1]

Renata Carvalho
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Introdução

O desenvolvimento do cálculo mental é apontado como um objetivo curricular importante há mais de 70 anos, mas nunca alcançou um lugar significativo nas práticas profissionais dos professores. No entanto, muitos documentos curriculares (*e.g.*, ME, 2007; NCTM, 2007) sublinham o papel do cálculo mental na aprendizagem da Matemática. A par destas orientações curriculares, diversos documentos e estudos realçam a importância de desenvolver o cálculo mental e indicam estratégias que podem ser usadas no cálculo mental com números naturais (*e.g.*, Bourdenet, 2007; Gálvez *et al.*, 2011; Heirdsfield, 2011; Thompson, 1999) e também com números racionais (*e.g.*, Callingham & Watson, 2004; Caney & Watson, 2003). Alguns destes trabalhos fornecem sugestões aos professores sobre como desenvolver o cálculo mental dos alunos.

O trabalho que apresentamos neste artigo decorre de uma experiência de ensino no 6.º ano centrada em tarefas de cálculo mental com números racionais positivos envolvendo as quatro operações e na discussão das estratégias e erros dos alunos. O nosso objetivo é perceber a prática do professor de Matemática tendo em vista desenvolver o cálculo mental dos alunos, enriquecendo as estratégias que estes usam e clarificando os seus erros, numa abordagem que valoriza os momentos de discussão na sala de aula.

Prática profissional do professor

O conceito de prática profissional do professor é amplamente usado, mas por vezes com um significado indefinido. Procurando precisar este conceito, Ponte e Chapman (2006), consideram que a prática profissional do professor pode ser vista como a atividade que este conduz, tendo em atenção o seu contexto de trabalho e os seus significados e objetivos. O conceito de prática como atividade enquadra-se numa abordagem sociocultural

(Even & Schwartz, 2002), sendo a sua construção resultante da interação entre o professor e outras pessoas, a começar pelos alunos, mas incluindo também colegas, formadores e outros atores sociais. A prática profissional pode também ser abordada numa perspetiva cognitiva (Schoenfeld, 2000) uma vez que se relaciona com a forma como o professor toma decisões, de acordo com as prioridades que estabelece, os planos de ação que formula e a forma como posteriormente os concretiza.

Ponte, Branco, Quaresma, Velez e Mata-Pereira (2012) destacam as tarefas e o tipo de comunicação que se desenvolve na sala de aula como elementos estruturantes da prática profissional. Na sua perspetiva, as tarefas caracterizam-se pelo seu contexto (matemático/não matemático e familiar/não familiar), pelo modo de apresentação (oral/escrito), pelo tempo previsível para a sua realização, pela sua estrutura (aberta/fechada) e nível cognitivo (elevado/reduzido). Quanto à comunicação, referem que esta pode ser unívoca, se existe uma voz que prevalece sobre todas as outras (normalmente a do professor) ou dialógica, se as vozes dos diferentes interlocutores interagem com relativa igualdade. São estes dois aspetos da prática profissional do professor que recebem especial atenção neste trabalho.

Numa comunicação conduzida numa perspetiva dialógica, o professor assume um papel importante na regulação do trabalho na sala de aula, tal como referem Matos e Serrazina (1996). Na sua perspetiva, o professor deve encorajar os alunos a assumirem um papel ativo na aprendizagem e fazê-los perceber que é importante aprender a questionar o pensamento aos colegas de modo a clarificarem ideias matemáticas. Consideram ainda que o professor precisa de ouvir os seus alunos e pedir-lhes que clarifiquem e justifiquem as suas ideias matemáticas, podendo recorrer a três modos de comunicação: exposição, questionamento e discussão. A exposição de uma ideia, história ou experiência envolve essencialmente um interveniente que pode ser o aluno ou o professor; no questionamento, o professor coloca um conjunto de questões com um determinado objetivo e a discussão permite uma multiplicidade de interações, quer dos alunos entre si, quer entre os alunos e o professor. O questionamento sucessivo pelo professor é uma forma de incentivar e esclarecer o aluno ao longo da sua atividade matemática. Estes autores referem ainda que o questionamento pode envolver perguntas de focalização, confirmação e inquirição. As perguntas de focalização ajudam o aluno a seguir um determinado raciocínio, as de confirmação servem para verificar os conhecimentos dos alunos e as de inquirição visam o esclarecimento do professor. Referem também que as perguntas de inquirição são perguntas verdadeiramente genuínas, em que o professor procura saber, por exemplo, o modo como os alunos estão a pensar, como resolveram um certo problema, ou qual a sua opinião sobre um dado resultado ou estratégia. Outros autores, como Menezes (1995) e Martinho e Ponte (2005), apontam igualmente o questionamento como a principal forma que o professor tem para estruturar a comunicação que ocorre na aula. A par do questionamento, Franke, Kazemi e Battey (2007) realçam o redizer (*revoicing*), cuja principal função é apoiar o desenvolvimento da linguagem dos alunos.

Procurando articular as perspetivas sociocultural e cognitiva, Ponte *et al.* (2012) apresentam um modelo para estudar a prática profissional do professor, nomeadamente a prática letiva, tendo por foco principal "a natureza e estrutura da atividade do professor observada na sala de aula e estreitamente ligada aos seus planos de ação e decisões" (p. 275). Acrescentam ainda que, do ponto de vista sociocultural é possível caracterizar as práticas procurando identificar (i) a natureza da atividade, ou seja, os motivos do professor e as ações que desenvolve para alcançar e concretizar os objetivos que pretende e (ii) a estrutura da atividade, observando as ações e operações envolvidas. Do ponto de vista cognitivo, as práticas podem ser caracterizadas através dos planos de ação do professor, decisões e técnicas usadas na realização das tarefas e da análise da comunicação. Em ambos os casos é importante ter em conta os recursos e ferramentas usadas pelo professor e os modos de trabalho dos alunos. Concretizando este modelo na análise de discussões coletivas, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) identificam quatro tipos de ações fundamentais a que o professor pode recorrer: convidar, desafiar, apoiar/guiar e informar/sugerir. Na sua perspetiva, convidar tem em vista envolver os alunos num dado segmento da discussão, guiar/apoiar ocorre quando o professor aponta de modo explícito ou implícito o caminho a seguir na resolução de uma questão, informar/sugerir ocorre quando o professor introduz uma nova ideia, representação ou procedimento e desafiar tem lugar quando o professor coloca questões aos alunos procurando que façam novos raciocínios.

A discussão coletiva das tarefas propostas, promovendo a reflexão dos alunos é fundamental para explorar e dar sentido aos conceitos matemáticos em estudo e, consequentemente, para a aprendizagem da Matemática. No caso do cálculo mental, esta discussão permite aos alunos apresentarem o modo como pensam bem como os seus argumentos e justificações que serão ou não validados pelos seus pares, tendo o professor um papel fundamental na condução desta discussão. Como refere Thompson (2009), o professor que pretende promover o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e clarificar os erros dos seus alunos precisa de: (i) criar um ambiente de sala de aula onde os alunos se sintam à vontade para falar das suas estratégias; (ii) escutar atentamente as suas explicações acerca dos seus métodos de cálculo pessoais; (iii) identificar estratégias particulares dos alunos e reforçar positivamente o seu uso; (iv) valorizar o conhecimento sobre os números e a capacidade dos alunos para executarem estratégias eficientes; e (v) assegurar que os alunos passam por experiências suficientes de modo a desenvolver progressivamente estratégias cada vez mais sofisticadas. Este tipo de ambiente de aprendizagem promove a interação entre todos os intervenientes na aula, permitindo aos alunos discutirem os seus erros e comunicarem matematicamente, contribuindo assim para a melhoria da sua linguagem matemática.

Saber ouvir os alunos, questioná-los, compreender as suas estratégias e promover as interações na sala de aula é uma aprendizagem para o professor. Para a sua concretização é importante preparar as discussões tendo em conta os objetivos da tarefa, as características dos alunos e a antecipação das suas possíveis estratégias e erros. Esta antecipação leva o professor a refletir relativamente ao como e porquê questionar os alunos e em que momentos.

Cálculo mental e estratégias e erros dos alunos

O conceito de cálculo mental tem sido alvo de diversas interpretações. Na perspetiva de Taton (1969) é errado limitar o cálculo mental a operações efetuadas de cabeça, uma vez que na realização de operações através de algoritmos por cálculo escrito, o cálculo mental também está presente. Salienta ainda que o cálculo escrito executado de memória não é mais do que uma forma de cálculo mental adaptado. Sowder (1990) apresenta um conceito de cálculo mental centrado mais em processos mentais do que escritos, referindo que o cálculo mental refere-se ao cálculo realizado de cabeça, em que o individuo normalmente, não tem acesso a papel e lápis. No entanto, a autora considera que muitas vezes o cálculo mental pode ser combinado com papel e lápis, ou mesmo com a calculadora. Numa perspetiva diferente, Reys, Reys, Nohda e Emori (1995) consideram que o cálculo mental refere-se aos processos mentais usados para calcular um resultado aritmético exato sem a ajuda de dispositivos externos (*e.g.*, calculadora). Estes autores não fazem referência à utilização de papel e lápis. Mais recentemente, retomando ideias de Taton (1969) e Sowder (1990), Buys (2001) e Bourdenet (2007) defendem que o cálculo mental não se restringe ao operar "de cabeça" e que a utilização de papel e lápis para cálculos intermédios pode ser útil.

Na década de 90 começa a emergir outro conceito associado ao cálculo mental — o sentido de número. Na perspetiva de McIntosh, Reys e Reys (1992) quando um aluno escolhe, desenvolve e usa métodos de cálculo mental o sentido de número está presente e este manifesta-se de diversas formas à medida que o aluno vai evoluindo no seu pensamento matemático. Mas os autores centram-se mais na análise e discussão do sentido de número do que no cálculo mental. Buys (2001) centra o seu conceito de cálculo mental nesta perspetiva de que o cálculo mental e sentido de número estão amplamente relacionados. O autor defende que o cálculo mental possui três caraterísticas importantes: (i) opera com números e não com dígitos; (ii) usa propriedades elementares das operações e relações numéricas; e (iii) permite o recurso a registos intermédios em papel.

A reflexão acerca destas e outras questões leva-nos a assumir que cálculo mental é um cálculo exato ou aproximado, efetuado mentalmente de forma rápida e eficaz, onde é possível recorrer a registos intermédios em papel. Contudo, consideramos que o cálculo mental contribui para o desenvolvimento do sentido de número e que o sentido de número apoia o desenvolvimento de flexibilidade no cálculo mental. O facto de algumas das estratégias dos alunos serem mais instrumentais, não refletindo o seu sentido de número, não invalida que estejam a realizar cálculo mental.

Thompson (1999a) considera que uma estratégia de cálculo mental não é mais do que uma aplicação rápida de conhecimentos ou de factos numéricos conhecidos, em combinação com propriedades específicas dos números para encontrar a solução de um cálculo cuja resposta não é conhecida. Segundo o autor, as estratégias de cálculo mental incorporam a ideia de que, ao ser dada às crianças uma coleção de números para trabalhar, estas vão selecionar a estratégia que é a mais adequada para os números específicos envolvidos na tarefa. Empson, Levi e Carpenter (2010) acrescentam ainda que uma estratégia surge em função da compreensão que cada criança tem acerca dos números e operações e das relações numéricas que lhe são familiares e que usa para estabelecer novas relações e efetuar o cálculo. Neste sentido, as imagens mentais, que os alunos constroem acerca dos números e operações aquando da sua aprendizagem, vão ser fundamentais para a construção de novas estratégias cada vez mais eficientes e complexas.

Ao calcularem mentalmente os alunos podem usar regras memorizadas, factos numéricos e/ou relações numéricas. Caney e Watson (2003) consideram que as estratégias dos alunos podem ser categorizadas em instrumentais se estes usam factos numéricos ou regras memorizadas, ou em concetuais se usam o conhecimento que possuem sobre números, suas relações e operações. Por exemplo, um aluno que, para calcular mentalmente $3/4 + 1/2$, aplica mentalmente as regras do algoritmo escrito de adição de frações (calcula o mesmo denominador, adiciona numeradores e indica como resultado $5/4$), usa uma estratégia instrumental onde não é possível perceber se compreende as quantidades envolvidas. Outro aluno que, para realizar a mesma operação, pensa em $3/4$ como sendo $1/2 + 1/4$ e raciocina que $1/2 + 1/2$ dá uma unidade e que uma unidade mais $1/4$ é $1\,1/4$ usa uma estratégia concetual baseada na decomposição de números onde mostra compreender a representação $3/4$. No entanto, consideramos que, por vezes, é difícil fazer uma categorização rígida das estratégias dos alunos, por duas razões: porque uma estratégia instrumental pode ser usada envolvendo compreensão concetual, e porque um aluno pode usar uma estratégia com características instrumentais e concetuais, ou seja, pode iniciar o seu raciocínio com uma estratégia instrumental e posteriormente seguir uma estratégia concetual. Por exemplo, um aluno que para calcular mentalmente $1/2 + 1/2$ refere que "dá 1 porque duas metades formam a unidade" usa um facto numérico conhecido (duas metades formam a unidade), ou seja, uma estratégia instrumental mostrando uma compreensão da representação $1/2$. Contudo, outro aluno que refere que "dá $2/2$ porque adicionei os numeradores e mantive os denominadores" usa igualmente uma estratégia instrumental mas não mostra compreensão concetual da representação $1/2$. Outro exemplo refere-se ao caso de alunos que podem partir de factos numéricos conhecidos (instrumental) para posteriormente estabelecerem relações numéricas (concetual) ou vice-versa tornando-se difícil a categorização. Por exemplo, um aluno que, para calcular $2{,}5 \div 0{,}5$, transforma $0{,}5$ em $1/2$ e posteriormente usa a regra do "inverte e multiplica" para calcular $2{,}5 \div 1/2$, começa por usar a mudança de representação (estratégia concetual) e posteriormente aplica uma regra memorizada para concluir o cálculo.

Retomando a perspetiva de Thompson (1999) de que a escolha de uma estratégia depende dos números envolvidos na tarefa, consideramos que no cálculo mental com números racionais a estratégia mais rápida e eficaz nem sempre é aquela onde é possível perceber que o aluno tem compreensão concetual acerca dos números e operações. Por exemplo, o cálculo exato de $1/7 \times 1/3$ usando uma estratégia envolvendo compreensão concetual é complexo, dado representarem dízimas infinitas. Neste caso, a estratégia mais rápida e eficaz é a aplicação mental do algoritmo escrito de multiplicação de frações chegando-se ao resultado $1/21$ e nem por isso se deixou de realizar cálculo mental.

O quadro 1 apresenta uma categorização para análise das estratégias de cálculo mental dos alunos com números racionais baseada na interpretação dessas estratégias e tendo

Quadro 1 — Estratégias de cálculo mental com números racionais
(adaptado de Caney & Watson, 2003)

Estratégia de cálculo mental
Imagens mentais
Dos algoritmos escritos
De representações dos números racionais (pictórica, decimal, fração, percentagem)
Factos numéricos
Tabuada
Uso de dobros e metades
Dividir por 2 é o mesmo que multiplicar por 0,5
Multiplicar por 0,2 é o mesmo que dividir por 5
Regras memorizadas
Multiplicação e/ou divisão por 10, 100, 1000 ou 0,1….
Relações numéricas
Estabelecimento de relações
Entre parte-todo
Entre parte-parte
Mudança de representação
Da decimal para fração e vice-versa
Da decimal para percentagem e vice-versa
Da representação fracionária para percentagem e vice-versa
Da representação decimal para números naturais referentes a 10/100
Equivalências
Entre frações
Entre expressões
Mudança de operação
Multiplicação para divisão e vice-versa
Multiplicação para adição sucessiva e vice-versa
Divisão para subtração sucessiva e vice-versa
Decomposição
Opera com a parte inteira e depois com a parte decimal e vice-versa
Decompõe um número em outros que considera de referência
Compensação
Adiciona/subtrai em busca de um número de referência
Propriedades das operações
Comutativa
Associativa
Distributiva da multiplicação em relação à adição

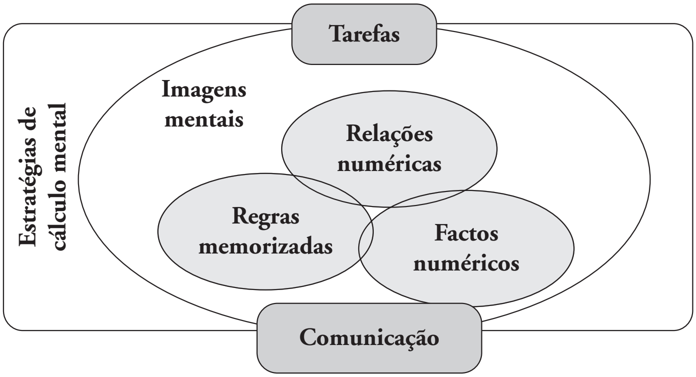

Figura 1 — Quadro concetual para o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais

por base o quadro concetual apresentado para a análise do desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos (Figura 1). Agrupámos as possíveis estratégias dos alunos em quatro grandes grupos, envolvendo o uso de imagens mentais, factos numéricos, regras memorizadas e relações numéricas.

A aprendizagem dos números racionais é particularmente complexa, e são diversos os erros que os alunos cometem na comparação, ordenação e cálculo envolvendo estes números. McIntsoh (2006) considera que os alunos cometem fundamentalmente dois tipos de erros no cálculo mental: concetuais e processuais. Segundo o autor, um erro concetual surge quando o aluno não compreende a natureza dos números ou a operação envolvida enquanto, num erro processual o aluno sabe que estratégia usar e ao pô-la em prática comete alguns erros por "distração". Por exemplo, o autor considera que se, ao calcular $0{,}1 \times 0{,}1$ o aluno responde 0,1 ou ao calcular $3 \div 1/2$ o aluno responde 1 ½, estes são erros concetuais. Se, no cálculo de $74-30$, o aluno responde 36, este é um erro processual, pois neste caso a estratégia de retirar 4 ao 74, subtrair 30 de 70 e depois voltar a adicionar 4 é uma boa estratégia, mas um problema de controlo do procedimento levou-o a subtrair em vez de adicionar. Considera ainda que os erros processuais são mais comuns no trabalho com números naturais e que os erros concetuais são mais comuns no trabalho com números racionais.

Os erros dos alunos podem estar associados a um certo tipo de dificuldade. Os alunos podem manifestar dificuldades em interpretar uma dada representação (*e.g.*, texto, símbolos, tabelas) ou ter dificuldades na mobilização de imagens mentais e factos numéricos. As dificuldades de interpretação podem originar erros de natureza concetual uma vez que envolvem conhecimentos prévios do aluno sobre Língua Materna e Matemática. O segundo tipo de dificuldade relaciona-se mais com erros de natureza processual uma vez que pode tem subjacente a mobilização rápida e automática de conhecimentos prévios sobre números e operações guardados na memória a longo prazo. Por exemplo, segundo

Dehaene (1997), ao visualizar a operação 2 + 3 ou 3 × 3 o aluno responde 6 em ambas as operações, não porque não sabe resolver a operação, mas porque o cérebro não guarda em compartimentos distintos determinados factos e imagens que depois utiliza de forma desconectada. Para que estes factos e imagens sejam mobilizados corretamente é necessário que o cérebro estabeleça conexões entre eles, reconstruindo a sua memória com base nestes conhecimentos fragmentados. O autor refere ainda que a integração de múltiplos factos numéricos na memória a longo prazo é difícil para a maioria das crianças.

Relativamente às relações numéricas estabelecidas pelos alunos nas suas estratégias, realçamos a importância de perceber e desenvolver o pensamento relacional (*relational thinking*) dos alunos (Empson *et al.*, 2010), uma vez que este pensamento pode ser usado para dar sentido às operações, principalmente com frações. A partir do momento em que as crianças compreendem as frações como um conjunto de relações, começam a ser capazes de compor e decompor quantidades com o propósito de transformar expressões e simplificá-las no cálculo, como no exemplo apresentado anteriormente em que o aluno decompôs 3/4 em 1/2 + 1/4. Um ponto fundamental no crescimento da compreensão das crianças é atingido quando estas começam a usar nas suas estratégias o pensamento relacional para fazer adição ou subtração sucessiva de frações de forma mais eficiente através da aplicação de propriedades fundamentais das operações e de igualdades para combinar quantidades. O pensamento relacional envolve o uso das propriedades fundamentais das operações e da igualdade para analisar e resolver um problema tendo em conta o seu contexto. Desenvolver o pensamento relacional nos alunos é ajudá-los a generalizar propriedades das operações e construir uma base para a aprendizagem da Álgebra.

Metodologia de investigação

Este estudo segue uma abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) com *design* de experiência de ensino (Cobb, Confrey, diSessa, Lehere, & Schauble, 2003). Participam uma professora, com uma longa experiência profissional no ensino da Matemática e que se identifica com as orientações curriculares preconizadas pelo Programa de Matemática (ME, 2007), uma turma do 6.º ano com 20 alunos que já trabalhou os números racionais em várias representações (decimal, fração, percentagem) e cujo aproveitamento a Matemática no final do 5.º ano se situou maioritariamente nos níveis 4 e 5, e a primeira autora no papel de investigadora.

A recolha de dados decorreu entre fevereiro e maio de 2012, sendo realizada através de observação direta das dez aulas em que se realizam tarefas de cálculo mental. As reuniões de trabalho com a professora foram áudio-gravadas e as aulas de cálculo mental foram áudio e vídeo-gravadas. Para a análise de dados foram visionados e transcritos os episódios de aula procurando identificar as ações da professora nos momentos de discussão de estratégias de cálculo mental e dos erros dos alunos. As ações da professora são caracterizadas segundo os cinco tipos de ações referidos por Ponte *et al.* (2013), tendo em atenção o tipo de estratégia usada pelos alunos tal como indicado no quadro 1.

A experiência de ensino

As tarefas e a comunicação na sala de aula, para além de serem aspetos estruturantes da prática letiva do professor, são também fundamentais no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos. A figura 1 apresenta um quadro concetual para o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos com números racionais que integra perspetivas de diversos autores (*e.g.*, Caney & Watson, 2003; Empson *et al.*, 2010; Heirdsfield, 2011; Thompson, 1999) que têm desenvolvido os seus trabalhos de investigação na área do cálculo mental com números naturais e números racionais.

Subjacentes ao desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos estão as imagens mentais que estes constroem previamente no trabalho com números racionais, os factos numéricos que conhecem, as regras memorizadas que possuem e as relações numéricas que podem estabelecer tendo em conta os conhecimentos que têm sobre números e operações. O conhecimento destes aspetos permite-nos construir tarefas e preparar os processos de comunicação na sala de aula, nomeadamente as discussões coletivas, com o intuito de promover o desenvolvimento de estratégias e clarificar os erros dos alunos no trabalho com números racionais. Consideramos que os momentos de trabalho com cálculo mental com números racionais devem ser integrados na planificação anual da disciplina de Matemática e realizados de forma sistemática, promovendo a articulação entre diferentes representações de números racionais e diferentes temas matemáticos (i.e., trabalhar cálculo mental com frações na Álgebra, com decimais na Geometria e com percentagens na Organização e Tratamento de Dados).

A experiência de ensino foi elaborada e proposta pela investigadora (primeira autora) após conhecimento prévio dos alunos e da planificação anual da turma para a disciplina de Matemática. As tarefas não foram criadas pela professora diretamente, mas a sua participação na discussão, preparação e reflexão fê-la apropriar-se de todo o trabalho a realizar na sala de aula. Consideramos que esta parceria entre professora e investigadora constitui uma mais-valia para a aprendizagem dos alunos e para a organização da prática letiva da professora.

Cada tarefa de cálculo mental foi pensada de forma a permitir não só rever e consolidar o trabalho com diversos números racionais de referência, mas também ampliar estratégias de cálculo mental e conduzir à clarificação e redução dos erros dos alunos. As tarefas foram cuidadosamente analisadas pela investigadora e pela professora e reformuladas, sempre que necessário, ao longo da experiência de ensino. Na preparação da discussão coletiva destas tarefas antecipámos estratégias e erros dos alunos, tendo em conta o conhecimento que possuíamos acerca da turma, e preparámos um conjunto de questões que pudessem ajudar os alunos a clarificar raciocínios, a interagir uns com os outros, a validar as suas respostas entre pares e a corrigir e consolidar conceitos matemáticos menos conseguidos.

A análise do desempenho dos alunos e as reflexões pós-aula da professora com a investigadora permitiram reformular tarefas e modos de atuação na sala de aula no momento das discussões coletivas. A gestão da discussão na sala de aula foi da responsabilidade da professora, intervindo a investigadora pontualmente quando sentia necessidade de esclarecer aspetos relacionados com a comunicação de estratégias e erros por parte dos alunos.

A experiência de ensino era composta por dez tarefas de cálculo mental com exercícios e problemas. As tarefas foram propostas aos alunos usando um *PowerPoint* temporizado. Esta opção pretendia desafiar os alunos a calcular mentalmente com números racionais e a desenvolver estratégias cada vez menos baseadas nos procedimentos algorítmicos que estavam habituados a realizar de papel e lápis. No caso dos problemas, primeiro a professora lia o enunciado e depois os alunos tinham 20 segundos para o resolver. Seguindo as sugestões de Reys *et al.* (1995), que consideram que o modo de apresentação visual contribui positivamente para o desempenho dos alunos no cálculo mental, mais do que o modo oral, o dispositivo de apresentação das tarefas combinava uma componente visual (a projeção) com uma oral (a leitura no caso dos problemas) de acordo com os resultados da investigação Assim, no caso dos problemas, usámos estes dois modos de apresentação em conjunto, tendo em conta as dificuldades reveladas pelos alunos nestas tarefas.

Das dez tarefas, sete eram exercícios, duas eram problemas e uma envolvia exercícios e problemas. Cada tarefa era constituída por duas partes e tinha uma duração prevista de 15 minutos, que acabou por se alargar aos 60 minutos, em média, dada a riqueza de estratégias discutidas e a necessidade de clarificar erros inesperados dos alunos. Estes tinham 15 segundos para resolver cada exercício e 20 segundos para resolver cada problema individualmente e anotar o resultado numa folha de papel, seguindo-se um momento de discussão. Nas tarefas em contexto matemático, a primeira parte continha cinco exercícios de cálculo mental, tendo os alunos que calcular o valor de cada expressão, seguindo-se um momento de discussão das suas estratégias, erros e dificuldades. A segunda parte da tarefa era constituída por mais cinco exercícios, em que os alunos tinham que indicar o valor em falta e que tornava a igualdade verdadeira, seguindo-se um novo momento de discussão.

A criação das tarefas seguiu quatro princípios que consideramos importantes para promover o desenvolvimento do cálculo mental nos alunos. O primeiro princípio prende-se com o uso de *contextos matemáticos e não matemáticos, que possam ajudar os alunos a perceber o significado dos números em diferentes situações*; o segundo tem a ver com a *diversificação das representações de um número racional* (decimal, fração e percentagem) de forma a ajudar aos alunos a estabelecer equivalências bem como relações entre estas representações e as suas imagens mentais acerca dos conceitos matemáticos; o terceiro, refere-se à *mobilização da investigação sobre o cálculo mental e os números racionais* na construção de tarefas, fornecendo informações acerca de estratégias e erros dos alunos no trabalho com estes números; e, por último, o quarto princípio refere-se ao uso de *tarefas com diferentes níveis de exigência cognitiva* assumindo que isso pode levar os alunos a desenvolverem o seu raciocínio. No quadro 2 apresentamos exemplos de algumas questões que fazem parte das dez tarefas de cálculo mental da experiência de ensino.

A discussão coletiva das tarefas de cálculo mental da experiência de ensino foi preparada previamente pela professora em conjunto com a investigadora que, em função dos alunos e da tarefa, previram as possíveis respostas e estratégias dos alunos, erros, dificuldades e possíveis questões a colocar, tais como: Como pensaste? Como chegaste ao teu resultado? O que pensam da estratégia do colega? Quem consegue explicar o erro do colega? Em que aspeto é que a tua estratégia é diferente da do teu colega?

Tendo em conta que a comunicação matemática oral é a única forma de aceder ao raciocínio dos alunos, uma vez que estes realizaram cálculo mental temporizado e que os registos em papel, na sua maioria, resumem-se ao resultado da operação, o questionamento por parte do professor é indispensável. Este questionamento tem o objetivo de ajudar os alunos a explicar e clarificar como pensaram e a ser críticos face às explicações dos colegas, gerando-se um ambiente de discussão onde se vai construindo um reportório de estratégias e se validam as respostas dos alunos, através da interação entre eles.

Quadro 2 — Exemplo de questões das tarefas da experiência de ensino

Tarefa 1 $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=$ __ __ $-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$	Tarefa 2 $\frac{1}{4}\div$ __ $=\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}\times$ __ $=1$	Tarefa 3 $\frac{1}{5}\times 0{,}25=$ __ $\frac{8}{10}-0{,}2=$___	Tarefa 4 0,7 + __ = 1 0,18 – 0,03 = __
Tarefa 5 12,2 ÷ 0,5 = __ = __ × 0,5 = 30	Tarefa 6 Uma tina tem de capacidade 22,5 l de água. **Quantos baldes de 1/2 l são necessários para encher por completo a tina?**	Tarefa 7 10% de __ = 5 25% de 20	Tarefa 8 $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ 0,2 de 10
Tarefa 9 $\frac{5}{10}+\frac{1}{4}=$ __ $2{,}2-$ ___ $=\frac{1}{5}$		Tarefa 10 Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, **qual a frequência relativa da outra face?**	

A gestão da discussão foi realizada com base neste conjunto de questões onde a professora assume uma atitude de questionamento em vez de uma atitude de validação de respostas e onde o confronto de estratégias, conduzam elas a um resultado certo ou errado, foi encarado como um momento rico de aprendizagem.

Ações da professora durante a discussão de estratégias e erros dos alunos

Nesta secção analisamos diversos episódios de aulas partindo dos objetivos da professora e analisamos as suas ações refletidas na forma como conduz os momentos de discussão de estratégias e erros dos alunos no cálculo mental com números racionais ao longo da experiência de ensino. A professora procura promover o desenvolvimento de estratégias alternativas aos algoritmos, incluindo a construção, clarificação e validação de estratégias. Além disso, as suas ações visam clarificar e corrigir a linguagem matemática e os erros manifestados por estes e envolvê-los na correção desses erros interpretando os contextos das tarefas. Os episódios que apresentamos evidenciam as estratégias mais comuns dos alunos no trabalho com cada uma das representações dos números racionais e as ações da professora durante os momentos de discussão. Na representação em fração as estratégias dos alunos centraram-se fundamentalmente na utilização de imagens mentais dos algoritmos (aplicação de regras memorizadas) e na utilização de factos numéricos e propriedades das operações. Na representação decimal, os alunos começaram a deixar de usar mentalmente o algoritmo, passando a usar frequentemente a mudança de representação para números referentes a 10/100 (sobretudo na adição e subtração operam com números na representação decimal como se fossem números naturais e apresentam o resultado na forma decimal), a mudança de representação de decimal para fração (na multiplicação e divisão) ou o recurso a factos numéricos e a relações numéricas. No cálculo envolvendo a representação em percentagem, os alunos usam com frequência a mudança de operação dividindo sucessivamente o valor sobre o qual aplicam a percentagem, mudam de representação (de percentagem para fração ou para decimal) e estabelecem relações parte-todo e/ou parte-parte. Os alunos iniciaram a experiência de ensino com cálculo mental com números racionais na representação fracionária uma vez que estavam a trabalhar relações e regularidades nas aulas de Matemática.

Desenvolver um reportório diversificado de estratégias

O uso mental de algoritmos, reproduzindo o que habitualmente faziam com papel e lápis, era uma estratégia já esperada pela professora, tendo em conta que estes procedimentos tinham tido um papel importante no trabalho feito anteriormente com as operações com números racionais. A análise de alguns diálogos que ocorrem durante as discussões coletivas evidencia o surgimento desta estratégia para a representação fracionária e as ações da professora para promover o desenvolvimento de estratégias alternativas.

Episódio 1. O diálogo seguinte mostra como esta conduz a discussão em torno do cálculo exato de $3/4 - 1/2$:

> *Ivo:* Fiz a regra. Fiz 2×2 que dava 4 e depois em cima também fiz vezes 2 e depois 3 menos 2 é 1. 1/4.
>
> *Professora:* Fizeste ai o algoritmo todo. As contas todas na tua cabecinha. Alguém? Ana?

Ana: Stora esta conta era igual à segunda [3/4 – 1/4], só que trocou-se. Na conta pôs-se 1/2 em vez de 1/4. Porque elas eram iguais.

Professora: Eram iguais? Uma era menos 1/4 e outra era menos 1/2. Mas como aqui não sabiam ainda se tinham feito aquela certa… Como é que fizeste?

Ana: Foi como o Ivo.

Professora: Quem fez de outra maneira? João?

João: Transformei o meio em 2/4. Depois 3 menos 2, 1.

Professora: E essa é diferente da do Ivo e da Ana?

João: Não.

Professora: Ninguém fez de outra maneira? A vocês que deu 1, já lá vou! Mas agora, depois de termos discutido as outras [questões de cálculo mental] se calhar já sabem fazer de outra maneira. Alguém fazia agora já de outra maneira? Como é que fazias João?

João: Eu, imaginava uma piza na minha cabeça onde estivesse fora uma fatia … 1/4 e tirava-se 1/2.

Professora: E ficava?

João: 1/4.

Ivo começa por apresentar uma estratégia baseada na aplicação de uma regra memorizada (o algoritmo para subtrair frações com denominadores diferentes). Esta estratégia, também indicada por Ana e João, é a mais comum nas primeiras sessões de cálculo mental com números racionais nesta representação. Contudo, Ana mostra compreender a relação entre esta expressão e outra discutida anteriormente (3/4 – 1/4 e 3/4 – 1/2), sinal de que a discussão a ajudou a estabelecer relações entre expressões.

A professora convida os alunos a apresentarem várias estratégias, na busca de diversidade. Procurando contribuir para a promoção do sentido crítico dos alunos, desafia-os quanto à existência de outra estratégia, valorizando o que tinha sido discutido previamente no cálculo de 1/2 + 1/2, 3/4 – 1/4 e 1/2 + 2/4. João apresenta então uma estratégia baseada na imagem mental de 3/4 (uma piza de onde se retirou 1/4) e 1/2, revelando compreender a relação parte-todo. Note-se que o apelo ao uso de contextos do quotidiano tinha sido anteriormente sugerido pela professora na discussão de uma outra operação.

Episódio 2. Outra forma de contribuir para o desenvolvimento e compreensão de estratégias é envolver os alunos na validação dessas mesmas estratégias. As ações da professora procuram levar os alunos a assumir um papel importante na validação de estratégias e resultados. A propósito do cálculo de 3/4 × ___ = 1, a professora, mais uma vez, conduz a discussão com base no confronto de várias estratégias e resultados, sem validar diretamente respostas:

> *Professora:* Esta primeira é para a Lídia. Pode ser?
>
> *Lídia:* Eu pus 4/3.
>
> *Professora:* Porquê?
>
> *Lídia:* Porque fiz logo que… Dá para fazer uma fração inversa da primeira e deu-me 1.
>
> *Professora:* 3/4, Pedro? A Lídia pôs 4/3 quem é que pôs 3/4 mais. Luís 3/4? E tu também puseste 3/4, também 3/4? Jorge, 3/4? Mais 3/4? Então Jorge quanto é que é $3/4 \times 3/4$?
>
> *Jorge:* 9/16.
>
> *Professora:* 9/16 e 9/16 é 1?
>
> *Jorge:* Não.
>
> *Professora:* Pronto, então… Quem pôs 3/4, não dá. Pois $3/4 \times 3/4$ é 9/16. Mas também não sei se a Lídia tem razão. Quem é que pôs mais 3/4? A Lídia tem razão?
>
> *Alunos:* Tem.
>
> *Professora:* Tem. E ouviram o que ela disse?
>
> *Ana:* Tem que se pôr um número inverso da que lá está.
>
> *Professora:* A fração inversa da que lá está e que dá logo 1. E reparem que 4/3, 4 vezes 3, 12 e 4 vezes 3, 12. Doze doze avos. Mas não temos que fazer este raciocínio, se a gente souber logo que é a fração inversa rapidamente coloca… Pedro?

A professora começa por ouvir Lídia que usa uma estratégia baseada numa regra memorizada (o produto de um número pelo seu inverso é um) e apercebe-se que uma grande parte dos alunos tem como resultado 3/4. Guia então Jorge, questionando-o quanto ao resultado de $3/4 \times 3/4$ e se esse resultado é ou não equivalente à unidade. Contudo, continua sem validar a resposta de Lídia e convida a turma a ser crítica relativamente à estratégia desta aluna ("A Lídia tem razão?") certificando-se que os alunos ouviram a explicação da colega. No final, explica que a regra memorizada por Lídia tem fundamento numa das propriedades da operação multiplicação, uma ação de informar, em que revê uma abordagem que já tinha realizado noutras aulas de Matemática. O questionamento da professora oscila entre questões de focalização ("ouviram o que ela disse?") com o intuito de apoiar os alunos e de inquirição ("porquê?") desafiando-os a apresentarem as suas justificações.

Episódio 3. Para calcular __ × 0,5 = 30 Pedro usa uma estratégia baseada numa relação numérica memorizada (multiplicar por 0,5 é o mesmo que dividir por 2):

> *Professora:* Esta vai para o Ricardo. Ricardo quanto te deu?
>
> *Ricardo:* 60.
>
> *Professora:* Ora o Ricardo diz que é 60, quem tem outro valor? Ivo?
>
> *Ivo:* Seis décimas.
>
> *Professora:* Seis décimas.
>
> *André:* Oh stora, eu primeiro pus 60 e depois pus 15.
>
> *Professora:* Há para aqui 15, há 60 e há para ali uns com decimais.
>
> *Pedro:* É 60 porque é a dividir por 2. 60 a dividir por 2 dá 30.
>
> *Professora:* Então Ivo, foste convencido ou vencido?

A professora ouve vários resultados e repete-os sem indicar qual a resposta correta, uma vez que pretende incentivar os alunos a validarem respostas. Este papel é assumido por Pedro que, ao explicar a sua estratégia, valida os resultados dos colegas. No final, a professora desafia Ivo a reavaliar a sua estratégia em função da explicação de Pedro.

Episódio 4. No cálculo do valor sobre o qual se aplica uma percentagem e cujo resultado é 20 (25% de ___ = 20), André mostra alguma dificuldade em perceber a relação parte-parte e a relação parte-todo. A professora, através de questões de confirmação e focalização e do recurso a um contexto familiar aos alunos (as pizas), tenta apoiar o aluno a perceber por que razão o resultado não pode ser 5 e a construir uma estratégia válida:

> *Professora:* André.
>
> *André:* É 5.
>
> *Professora:* É 5? 25% de 5 é 20? (…) 25% de um número é mais ou menos que esse número? O que é que eu quero dizer… Quanto é que é 100% de… Quanto é que seria 100% de 20?
>
> *André:* 20.
>
> *Professora:* É o 20, então 25% é mais que 100%?
>
> *André:* Não.
>
> *Professora:* Então eu acho 25% de um número e dá-me 20 e esse número é mais pequeno? Isto está aqui há mais do que tempo a ser discutido. (…) Que número é que tem de estar ali para o 25%. Corresponde a quanto em fração o 25%?

André: 1/4.

Professora: A 1/4, até sabes isso. Que número é que há-de estar ali para dar 20? (espera pela resposta de André) 20 é 1/4 desse número. Que número é que lá deveria estar?

Investigadora: André, 20 é 1/4, quanto é que é 2/4?

André: 50.

Investigadora: Olha, como é que tu passas do 20 para o 50?

Professora: Olha tens uma piza. Tens uma piza dividida em quartos, pronto. Em quantos quartos a piza está dividida?

André: Em 4.

Professora: Em 4. Custava 20€ cada fatia. Quanto é que custava a piza toda? Um quarto custava 20, quanto é que custava a piza toda?

André: 80.

Professora: 80. Quanto é que é o número que 25% desse número é 20?

Duarte: A stora já disse a resposta.

Através do questionamento, a professora começa por apelar ao sentido crítico do aluno: “25% de um número é mais ou menos que esse número?” e a interpretar a relação parte-todo, procurando apoiar André a construir uma estratégia e a validar o seu próprio resultado. Questiona-o acerca de uma fração equivalente à representação 25%, procurando que a mudança de representação possa levá-lo a compreender a situação que estava a ser discutida, mas sem sucesso. A investigadora procura guiar André a usar adições sucessivas das partes até chegar ao todo, o que também não resulta. Por fim, a professora opta por questionar André sugerindo uma situação que pode ser modelada pela expressão apresentada. Ao longo do seu discurso questiona e rediz aspetos importantes para a compreensão da situação: “Em 4. Custava 20€ cada fatia. Quanto é que custava a piza toda? Um quarto custava 20, quanto é que custava a piza toda?” Esta situação parece fazer sentido para André que vai correspondendo à medida que a professora o vai questionando. Esta situação realça a importância do contexto na compreensão das operações com números racionais e a necessidade de intercalar momentos de cálculo mental em contexto familiar para os alunos e em contexto matemático.

Episódio 5. Neste episódio é possível verificar alguma diversidade de estratégias por parte dos alunos. Para calcular 25% de 20, Dina muda de representação (usa 1/4 em vez de 25%) e divide por 4. Pelo seu lado, Ana recorre à mudança de operação e faz divisões sucessivas calculando primeiro metade e depois a metade da metade anterior. Pedro mostra-nos que para si 5% é um número de referência importante uma vez que 25 é múltiplo de 5. Apesar de manifestar um discurso um pouco confuso, Pedro apresenta uma estratégia baseada em relações numéricas. Pensou em 5% de 20 e que, como o 25 tem 5 cincos, o resultado final seria 5 vezes o resultado 5% de 20:

> *Professora:* Dina?
>
> *Dina:* Fiz 20 a dividir por 4 porque era 25. O que deu 5.
>
> *Professora:* Outra, Ana.
>
> *Ana:* Eu fiz 20 a div… Metade 50%, 10 e ainda depois outra vez metade, 5
>
> *Professora:* Sim, Luís.
>
> *Luís:* Eu ao inicio baralhei-me um pouco e pus 0,5 mas enganei-me. Depois fiz como a Dina, dividi por 4 e deu 5.
>
> *Professora:* Alguém pensou de outra maneira? Pedro vais explicar e depois explicas por que é que usas como número de referência o 5 e não o 10? Porque eu ainda não consegui perceber.
>
> *Pedro:* Porque olhei e não usei 10 porque o 10… Porque vi que o 25 não era múltiplo de 10. Foi assim que eu pensei. E decidi logo usar o 5. O 5% de 20 é… O 25 tinha três cincos… Cinco cincos e depois vi automaticamente que era o 5.

No diálogo com os alunos, a professora, como tem sido seu hábito, convida-os a apresentarem as suas estratégias e tenta perceber por que razão Pedro usa como referência 5% e não 10%, como ela esperava. Antes de Dina e Ana, já João tinha apresentado a sua estratégia, mas só agora a professora questiona diretamente o aluno pedindo-lhe que clarifique a sua opção com o intuito de perceber melhor o raciocínio utilizado.

Compreender e clarificar erros

Os erros cometidos pelos alunos no cálculo mental com números racionais relacionam-se principalmente com dificuldades de interpretação de uma representação (*e.g.*, leitura dos números e dificuldade de interpretação do contexto) ou com dificuldades de mobilização de factos (*e.g.*, aplicação incorreta de propriedades das operações). A preocupação da professora em corrigir e clarificar a linguagem matemática dos alunos evidencia-se constantemente tendo em conta as dificuldades que antecipou e os conhecimentos que possui acerca do ensino-aprendizagem dos números racionais.

Episódio 6. Vejamos um momento da discussão a propósito das estratégias para calcular ___ – 5/10 = 3/10:

> *Professora:* Eu gostava de vos ouvir a todos. Agora vai ser a Lídia. Lídia, o que é que te deu ali?

> *Lídia:* Eu pus oito dez avos.
>
> *Professora:* Lídia… Ela disse oito dez avos? Sabes, nós não costumamos ler assim esta fração. Como é que costumamos ler?
>
> *Lídia:* Oito décimos. Eu mantive o 10 no denominador e depois em cima arranjei um número que o resultado desse no numerador 3.
>
> *Professora:* Resultado numa?
>
> *Lídia:* Subtração.

A professora começa por manifestar interesse na participação de todos os alunos. Relativamente à forma como Lídia lê 8/10, em vez de a corrigir de imediato, apoia a correção da linguagem matemática da aluna repetindo a leitura feita por esta e questiona-a acerca da forma correta de ler uma fração decimal. A aluna corresponde, lê corretamente a fração e apresenta a sua estratégia: "arranjei um número que o resultado desse no numerador 3". Apesar da sua expressão não ser muito clara, dá a entender que usou a operação inversa para chegar ao resultado. A professora, ao questionar "resultado numa?", apoia a aluna a clarificar o seu discurso, um aspeto importante para a compreensão da explicação desta por parte da turma.

Episódio 7. O diálogo que a professora estabelece com Maria, a propósito da estratégia para calcular $12{,}2 \div 0{,}5$, mostra igualmente a sua preocupação com a clarificação da linguagem matemática usada por Maria para explicar o seu raciocínio:

> *Professora:* Maria.
>
> *Maria:* A mim deu-me 24,4.
>
> *Professora:* E como é que fizeste?
>
> *Maria:* Fiz a operação inversa do 0,5. Fiz 12,2 vezes 2.
>
> *Professora:* Não é a operação inversa. Tu tens um conhecimento que é o quê? Dividir …
>
> *Maria:* A divisão de frações é multiplicar e inverter.
>
> *Professora:* Ahh, tu fizeste com a fração 1/2 e inverteste, não foi a operação inversa. Inverteste 1/2. Perceberam a Maria?
>
> *Investigadora:* Maria, podes explicar de novo?
>
> *Maria:* Eu inverti o 0,5 que deu 2 e depois fiz 12,2 vezes 2.
>
> *Professora:* Tu não inverteste o 0,5, transformaste o 0,5.
>
> *Maria:* Em fração.
>
> *Professora:* Qual?

Maria: 2.

Investigadora: Cinco décimas transformaste em…

Maria: 1/2.

Professora: Ah! estás a cortar etapas.

Comunicar matematicamente e explicitar raciocínios usando uma linguagem matemática correta não é tarefa fácil para os alunos, cabendo ao professor ajudá-los a melhorar a forma como o fazem. Maria usa a estratégia de mudança de representação (de decimal para fração) e posteriormente aplica uma regra memorizada (para dividir por uma fração inverte e multiplica) mas manifesta dificuldade em expressar-se. A professora começa por pedir à aluna que explique como fez o cálculo, percebe que a sua estratégia é válida mas que a forma como a apresentou está incorreta. Coloca uma questão de focalização, por um lado para ajudar Maria a focar-se no conhecimento que possui ("tu tens um conhecimento que é o quê?") e, por outro, para envolver a turma na discussão ("perceberam a Maria?"). Ao longo do diálogo vai ajudando a aluna a estruturar de forma correta a sua explicação apoiando o seu raciocínio: "tu não inverteste o 0,5, transformaste o 0,5" e questionando-a.

Episódio 8. Nas tarefas envolvendo problemas uma das dificuldades manifestadas pelos alunos é a interpretação da situação, o que por vezes pode levar à não realização do cálculo ou a cometer erros na aplicação de uma estratégia. O diálogo seguinte mostra como a professora, no momento da discussão coletiva, apoiou Maria na interpretação e compreensão do problema da tarefa 10 (ver quadro 2):

Professora: Lançou-se uma moeda, lançou-se uma moeda ao ar vinte vezes. Sabes o que é uma moeda?

Maria: (Movimenta a cabeça afirmativamente)

Professora: Sabes o que é lançar ao ar?

Maria: (Continua a responder afirmativamente coma cabeça)

Professora: … 20 vezes. Registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. Só agora aqui uma pergunta intermédia. Registaram-se de que maneira?

Maria: É em percentagem.

Professora: Por percentagem, pronto. Tudo bem, não é? Temos estado até a falar disto [nas aulas de Matemática], por isso não vi onde é que estava o problema. Se à face euro corresponder zero vírgula, eu agora vou dizer mal de propósito, zero vírgula quarenta, ou seja, quarenta centésimas. O que isto é?

Maria: 40%.

Professora: Até aí estavas a descodificar o problema bem.

Maria: (Movimenta a cabeça afirmativamente).

Professora: De frequências relativas. Qual a frequência relativa da outra face?

Pedro: Zero vírgula…

Professora: Aiiii, xiu. Maria, quanto é que há-de ser a da outra face?

Maria: (Responde negativamente movimentando a cabeça).

Professora: O que é a frequência relativa? O que é que se contou? O que é que deu 40?

Maria: A face do euro.

Professora: E o que é que acontecia? Caía?

Maria: A face do euro.

Professora: Do euro, percebeste isso? Então se a do euro cai 40% a outra teve de cair quanto?

Maria: 60. Ah, ya! Mas eu não percebi o que é que eles queriam! Que fácil!

João: Eu baralhei-me todo.

Professora: Ahhh, pois.

Maria: Então stora eu não estava a perceber o que é que eles queriam fazer com isto.

Professora: Ah, o que é que queriam? Está cá a pergunta clara!

Maria não conseguiu resolver o problema nos 20 segundos e manifestou não ter compreendido a situação. No momento da discussão, a professora começa por reler o problema intercalando esta leitura com questões de confirmação: “Sabes o que é uma moeda?”, “Sabes o que é lançar ao ar?”. Pretende com este questionamento, numa primeira fase, perceber se Maria está a compreender a situação. Numa segunda fase, ao questioná-la acerca da forma como se regista numa tabela de frequências, o que é a frequência relativa, o que é que se contou e o que é que deu 40, tenta focar a aluna nos conhecimentos matemáticos necessários para resolver o problema e perceber como esta os relaciona com a situação apresentada. Termina o seu questionamento focando Maria na resposta ao problema: “Então se a do euro cai 40%, a outra teve de cair quanto?” É neste momento que a aluna manifesta compreender o problema considerando-o de fácil resolução.

Episódio 9. A clarificação dos erros dos alunos é também um aspeto que preocupa a professora. Na sequência da discussão anterior com Lídia a propósito do cálculo de $\_\_ - 5/10 = 3/10$, Bruno e Marta apresentam uma estratégia incorreta:

> *Professora:* Bruno, outro processo?
>
> *Bruno:* Fiz 5. Mantive o denominador e só vi os numeradores e deu-me 2.
>
> *Professora:* Mas já vimos que esse não é o resultado certo. Então ao 5 foste tirar o 3 foi?
>
> *Ana:* Ele devia ter feito 5 mais 3 para saber quanto é que era.
>
> *Professora:* Vamos ouvir a Marta.
>
> *Marta:* Eu fiz mal, fiz 2/10, porque… Só que eu não fiz como a professora há bocado disse como é que a gente podia fazer. Eu fiz, fui à procura de um número a que nós pudéssemos tirar 5 e que desse 3 e depois deu 2.
>
> *Professora:* Foste à procura de um número…
>
> *Marta:* Que se nós retirássemos esse número ao 5 desse 3. (…) Não, agora já percebi que estava mal!
>
> *Professora:* Trocaste o aditivo com o subtrativo. A propriedade comutativa existe na subtração?
>
> *Alunos:* Não.

Bruno apresenta uma estratégia em que subtrai ao numerador do subtrativo o numerador da diferença (erro processual), e não revela qualquer sentido crítico acerca do resultado. A professora valida a resposta de Bruno tendo em conta o que já tinha sido discutido anteriormente com Lídia, reinterpreta a sua estratégia na forma de uma questão de confirmação ("então ao 5 foste tirar o 3 foi?") e decide ouvir a estratégia de Marta. Esta indica uma estratégia semelhante à de Lídia: "fui à procura de um número a que nós pudessemos tirar 5 e que desse 3", mas aplica a propriedade comutativa, pois de acordo com o resultado que apresenta teria de calcular $2/10 - 5/10$ e não $5/10 - 2/10$. No entanto, reconhece o erro e mostra ter sentido crítico relativamente à sua estratégia. A professora, em vez de validar a resposta de Marta, reinterpreta-a e devolve a questão à turma ("a propriedade comutativa existe na subtração?"), convidando os restantes alunos a refletirem acerca da estratégia usada por Marta.

Episódio 10. A professora procura envolver os alunos na discussão de modo a serem cada vez mais críticos, não só em relação à forma como pensam e detetam os seus erros, como relatámos anteriormente no caso de Marta, mas também em relação às estratégias apresentadas pelos colegas. O diálogo seguinte mostra como a professora, através de uma questão de inquirição, desafia João a interpretar e a explicar o erro de Rui no cálculo de $0{,}14 \div 0{,}2$:

Rui: A mim deu-me 28 centésimas.

Professora: Foi?

João: Já sei porque é que ele se enganou.

Professora: Porque é que ele se enganou? Então ele enganou-se porquê?

João: Porque 1/2 é 0,5 e ele como 1/2 é um sobre 2 ele confundiu o 2 com 0,2 e por isso multiplicou por 2 e tinha que multiplicar por 5. Porque duas décimas são vezes 5.

Professora: Mas eu ainda não disse que o João tinha razão. Ele disse que tu estavas errado e até disse porque tinhas errado. Estás de acordo com ele?

Rui: Sim.

Após Rui ter apresentado o seu resultado, a professora não comenta, apenas desafia João a explicar o erro do colega. Na realidade, Rui multiplica 0,14 por 2 quando deveria ter dividido (erro concetual), existindo a hipótese de ter confundido algumas regras memorizadas como explica João ou de não ter suficientemente desenvolvido o sentido de operação divisão com números racionais. A professora não valida a explicação de João e interpela Rui para interpretar e compreender o erro que cometeu.

Conclusão

Este estudo mostra que a prática profissional do professor na sala de aula no ensino do cálculo mental pode ser analisada com foco nas tarefas propostas e no tipo de comunicação que se realiza (Franke *et al.*, 2007; Ponte *et al.*, 2012). As tarefas, desenhadas de acordo com um conjunto de quatro princípios relativos aos contextos, representações, níveis de exigência cognitiva, e estratégias e erros dos alunos, proporcionaram uma grande variedade de oportunidades de aprendizagem que foram exploradas na sala de aula num registo de comunicação dialógica (Matos & Serrazina, 1996; Ponte *et al.*, 2012). A professora assumiu como objetivo fundamental da sua atividade (o seu motivo) contribuir para que os alunos desenvolvessem um repertório diversificado de estratégias de cálculo mental e compreendessem os seus erros. Para o atingir estabeleceu como modo de trabalho a realização de discussões coletivas onde os alunos apresentaram o que pensam e como pensam, argumentando e justificando os raciocínios usados. Estes momentos de discussão foram cuidadosamente preparados, procurando antecipar as estratégias e erros dos alunos.

Durante a discussão coletiva, as ações que o professor desenvolve de acordo com o objetivo pretendido podem ser encaradas como ações de convidar, desafiar, apoiar/guiar e informar/sugerir (Ponte *et al.*, 2013) envolvendo questões de inquirição, focalização e confirmação. Este quadro de análise permite apreciar o modo como a professora procura desenvolver nos alunos um reportório diversificado de estratégias. Assim, na discussão de tarefas envolvendo a representação em fração, para promover o desenvolvimento de estratégias alternativas aos algoritmos, a professora convida os alunos a apresentar novas estratégias e desafia-os a validar estratégias e a apresentar justificações. Através do questionamento desafia os alunos a clarificar e a construir estratégias. Recorre ao informar para relembrar e relacionar aprendizagens, aconselhar o uso de contextos familiares e direcionar os alunos para a apresentação de estratégias produtivas no cálculo mental com números racionais como a mudança de representação e o uso de relações numéricas com recurso a números de referência. Na discussão de tarefas nas representações decimal e em percentagem, para promover o desenvolvimento de novas estratégias por parte dos alunos, predominam igualmente as ações da professora de apoiar e desafiar, levando os alunos a usar cada vez mais estratégias baseadas na mudança de representação, em relações numéricas e factos numéricos (decimal) e mudança de operação, mudança de representação e uso da relação entre parte-parte e parte-todo (percentagem).

Outras ações da professora têm em vista levar os alunos a compreender e clarificar os erros. Assim, para promover a correção e clarificação da linguagem matemática dos alunos, a interpretação de problemas e a clarificação dos erros, apoia redizendo e reinterpretando expressões dos alunos e recorre a questões de confirmação para os ajudar a clarificar o discurso e perceber que compreensão manifestam ter da situação. Além disso, recorre a questões de focalização para os focar nos conhecimentos matemáticos que possuem e que são importantes para a compreensão e realização do cálculo e desafia os alunos a interpretar e explicar os erros com recurso a questões de inquirição e convida-os a envolverem-se na discussão.

Estas ações da professora assumem um papel importante na condução da discussão coletiva e a frequência com que surgem na sua prática depende do seu objetivo inicial e dos contributos dos alunos para os momentos de discussão. A ação de convidar está presente em todos os episódios tendo em vista a participação dos alunos. Desafiar, através do questionamento, marca decisivamente os momentos de discussão quer de estratégias quer de erros tendo em conta o seu objetivo inicial. Guiar e apoiar aparecem relativamente pouco mas informar/sugerir marca alguma presença na discussão de estratégias, quando a partir das respostas dos alunos, a professora considera importante relacionar aprendizagens ou ajudá-los construir estratégias produtivas.

Este estudo mostra o importante papel das discussões coletivas no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos e na sua compreensão dos erros cometidos, evidenciando a variedade de ações que o professor realiza tendo em vista atingir diversos objetivos — envolver os alunos em atividade, desafiá-los de modo a desenvolverem o seu conhecimento matemático, levá-los a refletir sobre a validade das suas respostas e das respostas dos colegas, melhorar a sua capacidade de uso da linguagem matemática. O conhecimento acerca da prática letiva dos professores constitui uma mais-valia para a formação inicial e contínua de professores.

Nota

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT — Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008) e por uma bolsa atribuída à primeira autora (referência SFRH/BD/69413/2010).

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bourdenet, G. (2007). Le calcul mental. *Activités mathématiques et scientifiques*, *61*, 5–32.

Buys, K. (2001). Mental arithemetic. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed), *Children learn mathematics* (pp. 121–146). Utrecht: Freudenthal Institute.

Callingham, R., & Watson, J. (2004). A developmental scale of mental computation with part-whole numbers. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 69–86.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. AARE 2003 *Conference papers, International Education Research*. (retirado de http://www.aare.edu.au/03pap/can03399.pdf em 15/05/2010).

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehere, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13.

Dehaene, S., (1997). *The number sense: How the mind creates Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T. (2010). The algebraic nature of fraction: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409–428). Heidelberg: Springer.

Even, R., & Schwartz, B. B. (2002). Implications of competing interpretations of practice and research and theory in mathematics education. In *Procedings of PME Conference* (Vol. 2, pp. 337–344).

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 225–256). Greenwich, CT: Information Age.

Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, E., Flores, X., Luci, G., Montoya, S., & Soto-Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *RELIME*, *14*(1), 9–40.

Heirdsfield, A. (2011). Teaching mental computation strategies in early mathematics. *Young Children*, *66*(2), 96–102.

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. In J. Brocardo, F. Mendes & A.M. Boavida (Eds.), *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 273–293). Setúbal: APM.

Matos, J., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2–8 & 44.

McIntosh, A., (2006). Mental computation of school-aged students:Assessement, performance levels and and common errors. The fifth Swedish Mathematics Education Research Seminar. (retirado de http://www.mai.liu.se/SMDF/madif5/papers/McIntosh.pdf em 21/10/2011).

Menezes, L. (1995). *Concepções e práticas de professores de Matemática: Contributos para o estudo da pergunta* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa, Portugal.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa. (retirado de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMate matica.pdf em 29/02/2008)

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., Quaresma, M., Velez, I., & Mata-Pereira, J. (2012). Perspetivas teóricas no estudo das práticas profissionais dos professores de matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Práticas de ensino da Matemática: Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 267–279). Lisboa: SPIEM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461–494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, XXII(2), 55–81.

Rathouz, M.M. (2011). Making sense of decimal multiplication. *Mathematics Teaching in the Middle School. 16*(7), 430–437.

Reys, R.E., Reys, B. J., Nohda, N., & Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(4), 304–326.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 243–261.

Sowder, J., T. (1990). Mental computation and number sense. *Arithmetic Teacher*, *37*, 18–20.

Taton, R. (1969). *O cálculo mental.* Lisboa: Arcádia.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction, Part 1. *Mathematics in School*, *28*(5), pp. 2–5.

Thompson, I. (2009). Mental calculation. *Mathematics Teaching*, *213*, 40–42.

Resumo. Neste artigo analisamos a prática do professor de Matemática tendo em vista o desenvolvimento do cálculo mental dos alunos e a superação dos seus erros, numa abordagem que valoriza os momentos de discussão na sala de aula. O quadro de análise caracteriza a prática profissional do professor de acordo com as ações que desenvolve: convidar, apoiar, desafiar, guiar e sugerir. A metodologia é qualitativa com um design de experiência de ensino onde participam uma professora, 20 alunos do 6.º ano e uma investigadora. Os dados foram recolhidos através de gravações áudio e vídeo de reuniões de trabalho com a professora e de aulas de cálculo mental. Os resultados mostram que uma prática de ensino de cálculo mental necessita de ter por base tarefas apropriadas e momentos de discussão coletiva pontuados por ações diversas, com destaque para as que envolvem o desafiar e o apoiar os alunos.

Palavras-chave: Cálculo mental, números racionais, estratégias; prática profissional

Abstract. The aim of this paper is to analyze mathematics teacher practice considering the development of students' mental computation and the overcoming of their errors, in an approach that values whole class discussions. The framework defines teachers' professional practice according to his/her actions: inviting supporting, challenging, guiding, and suggesting. The methodology is qualitative with a teaching experiment design. The participants are a teacher, 20 students from 6th and a researcher. Data were collected through audio and video recordings of the working meetings with the teacher and from mental computation lessons. The results show that a teaching practice to develop students' mental computation needs to stand on appropriate tasks and on whole class discussions in which teachers carry out different kinds of actions, with emphasis on those that involve challenging and supporting students.

Keywords: Mental computation, rational numbers, strategies, professional practice

RENATA CARVALHO
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
renatacarvalho@campus.ul.pt

JOÃO PEDRO DA PONTE
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

(recebido em abril de 2013, aceite para publicação em outubro de 2013)